PART2　1 次不定方程式

例題

次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1)　$5x-2y=1$　　(2)　$3x+4y=1$

Point Pickup

練習

次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1)　$11x-8y=1$　　(2)　$5x+13y=1$

第 9 講　PART2　確認問題

次の方程式の整数解をすべて求めよ。

1　$13x-4y=1$　……①

この方程式の整数解の1つは　$x=1$，$y=$ [ア]

よって　$13\cdot1-4\cdot$ [ア] $=1$　……②

①－②より　$13(x-1)=4(y-$ [ア]$)$

13と4は互いに素より，$x-1$ は [イ] の倍数である。

よって，$x-1=$ [イ]k　（k は整数）　と表される。

したがって，求める整数解は

$x=$ [イ]$k+1$，$y=$ [ウエ]$k+$ [オ]　（k は整数）

である。

2　$17x+7y=1$　……①

この方程式の整数解の1つは　$x=-2$，$y=$ [カ]

よって　$17\cdot(-2)+7\cdot$ [カ] $=1$　……②

①－②より　$17(x+2)=-7(y-$ [カ]$)$

17と7は互いに素より，$x+2$ は [キ] の倍数である。

よって，$x+2=$ [キ]k　（k は整数）　と表される。

したがって，求める整数解は

$x=$ [キ]$k-2$，$y=-$ [クケ]$k+$ [コ]　（k は整数）

である。

PART2　1 次不定方程式

例題

次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1)　$5x-2y=1$　　(2)　$3x+4y=1$

(1)　$5x-2y=1$ …… ①

この方程式の整数解の 1 つは $x=1$，$y=2$

よって $5\cdot1-2\cdot2=1$ …… ②

①－②より $5(x-1)-2(y-2)=0$　つまり　$5(x-1)=2(y-2)$ …… ③

5 と 2 は互いに素より，$x-1$ は 2 の倍数である。

よって，$x-1=2k$（k は整数）と表される。

このとき，③より $5\cdot2k=2(y-2)$　　$5k=y-2$

したがって，求める整数解は $x=2k+1$，$y=5k+2$（k は整数）

(2)　$3x+4y=1$ …… ①

この方程式の整数解の 1 つは $x=3$，$y=-2$

よって $3\cdot3+4\cdot(-2)=1$ …… ②

①－②より $3(x-3)+4(y+2)=0$　つまり　$3(x-3)=-4(y+2)$ …… ③

3 と 4 は互いに素より，$x-3$ は 4 の倍数である。

よって，$x-3=4k$（k は整数）と表される。

このとき，③より $3\cdot4k=-4(y+2)$　　$-3k=y+2$

したがって，求める整数解は $x=4k+3$，$y=-3k-2$（k は整数）

練習

次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1)　$11x-8y=1$　　(2)　$5x+13y=1$

(1)　$11x-8y=1$ …… ①

この方程式の整数解の 1 つは $x=3$，$y=4$

よって $11\cdot3-8\cdot4=1$ …… ②

①－②より $11(x-3)-8(y-4)=0$　つまり　$11(x-3)=8(y-4)$ …… ③

11 と 8 は互いに素より，$x-3$ は 8 の倍数である。

よって，$x-3=8k$（k は整数）と表される。

このとき，③より $11\cdot 8k=8(y-4)$ $\qquad 11k=y-4$

したがって，求める整数解は $x=8k+3$，$y=11k+4$（k は整数）

(2) $5x+13y=1$ …… ①

この方程式の整数解の 1 つは $x=-5$，$y=2$

よって $5\cdot(-5)+13\cdot 2=1$ …… ②

①－②より $5(x+5)+13(y-2)=0$　つまり　$5(x+5)=-13(y-2)$ …… ③

5 と 13 は互いに素より，$x+5$ は 13 の倍数である。

よって，$x+5=13k$（k は整数）と表される。

このとき，③より $5\cdot 13k=-13(y-2)$ $\qquad -5k=y-2$

したがって，求める整数解は $x=13k-5$，$y=-5k+2$（k は整数）

第 9 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：4，ウエ：13，オ：3

[解説]

$13x-4y=1$ ……①

この方程式の整数解の 1 つは　$x=1$，$y=3$ [A]

よって　$13\cdot1-4\cdot3=1$ ……②

①－②より　$13(x-1)=4(y-3)$ ……③

13 と 4 は互いに素より，$x-1$ は 4 の倍数である。 [B]

よって，$x-1=4k$　（k は整数）　と表される。

このとき，③より $13\cdot4k=4(y-3)$　　$13k=y-3$

したがって，求める整数解は

$x=4k+1$，$y=13k+3$　（k は整数）

[A]　1 次不定方程式 $ax+by=c$　（a，b は互いに素）の整数解の解法
方程式を満たす 1 組の解（特殊解）を見つける。
その解を方程式に代入した式と，元の方程式との差をとる。

[B]　k を整数とする。
a，b が互いに素で，ak が b の倍数のとき，k は b の倍数である。

2

[正解] カ：5，キ：7，クケ：17，コ：5

[解説]

$17x+7y=1$ ……①

この方程式の整数解の 1 つは　$x=-2$，$y=5$ [C]

よって　$17\cdot(-2)+7\cdot5=1$ ……②

①－②より　$17(x+2)=-7(y-5)$ ……③

17 と 7 は互いに素より，$x+2$ は 7 の倍数である。 [D]

よって，$x+2=7k$　（k は整数）　と表される。

このとき，③より $17\cdot7k=-7(y-5)$　　$17k=-(y-5)$

したがって，求める整数解は

$x=7k-2$，$y=-17k+5$　（k は整数）

[C]　1 次不定方程式 $ax+by=c$　（a，b は互いに素）の整数解の解法
方程式を満たす 1 組の解（特殊解）を見つける。
その解を方程式に代入した式と，元の方程式との差をとる。

[D]　k を整数とする。
a，b が互いに素で，ak が b の倍数のとき，k は b の倍数である。